تحت إشراف الأستاذ: ذ: بوشعيب المانني

حل الفرض المحروس رقم ① للأسدس الثاني

من إنجاز التلميذة: جهاد المزلوزي

I-

1- ♦ لنبين أن $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=0$

نضع $x=tn$

إذن $x\to-\infty \Rightarrow t\to-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=\lim_{x\to-\infty}(1-x)^n e^{2x}$$
$$=\lim_{t\to-\infty}(1-tn)^n e^{2tn}$$
$$=\lim_{t\to-\infty}((1-tn)e^{2t})^n$$
$$=\lim_{t\to-\infty}(e^{2t}-\frac{n}{2}(2te^{2t}))^n$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_n(x)=0}$$

[لأن $\lim_{t\to-\infty} e^{2t}=\lim_{t\to-\infty} 2te^{2t}=0$]

♦ لنحسب النهاية $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n e^{2x}$

إذا كان n زوجي:

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$

وعليه $\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n=+\infty$

ونعلم $\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=+\infty$

إذن

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=+\infty}$$

إذا كان n فردي:

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$

وعليه $\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n=-\infty$

نعلم أن: $\lim_{x\to+\infty} e^{2x}=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=-\infty$$

2) الفرع النهائي للمنحنى (C_n) عند $+\infty$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)=\infty$

لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}$

لدينا $\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-x)^n e^{2x}}{x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n\times 2\times\frac{e^{2x}}{2x}$$

إذا كان n زوجي

لدينا $\lim_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$

إذن $\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n=+\infty$

ونعلم $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=+\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}=+\infty}$$

إذا كان n فردي

$\lim_{x\to+\infty}(1-x)=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}(1-x)^n=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=+\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}=-\infty}$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f_n(x)}{x}=\infty$$

$\Leftarrow$ (C_n) يقبل فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$

3- حساب $f_n'(x)$

$$f_n'(x)=((1-x)^n e^{2x})'$$

$$f_n'(x) = -n(1-x)^{n-1}e^{2x} + 2(1-x)^n e^{2x}$$

$$f_n'(x) = (1-x)^{n-1}e^{2x}\left(-n+2(1-x)\right)$$

$$\boxed{f_n'(x) = (1-x)^{n-1}e^{2x}(2-2x-n)}$$

بالنسبة للدالة f_1

$$f_1'(x) = (1-x)^0(2-2x-1)e^{2x}$$
$$= (1-2x)e^{2x}$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ $\frac{1}{2}$ $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f_1'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$
$f_1(x)$	0 $\nearrow$ $\frac{e}{2}$ $\searrow$ $-\infty$

بالنسبة للدالة f_2

$$f_2'(x) = (1-x)e^{2x}(2-2x-2)$$
$$= -2x(1-x)e^{2x}$$

$$\boxed{f_2'(x) = 2x(x-1)e^{2x}}$$

جدول التغيرات.

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f_2'(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
$f_2(x)$	0 $\nearrow$ 1 $\searrow$ 0 $\nearrow$ $+\infty$

4- لندرس الوضع النسبي للمنحنيين (C_1) و (C_2).

$$f_2(x) - f_1(x) = (1-x)^2e^{2x} - (1-x)e^{2x}$$

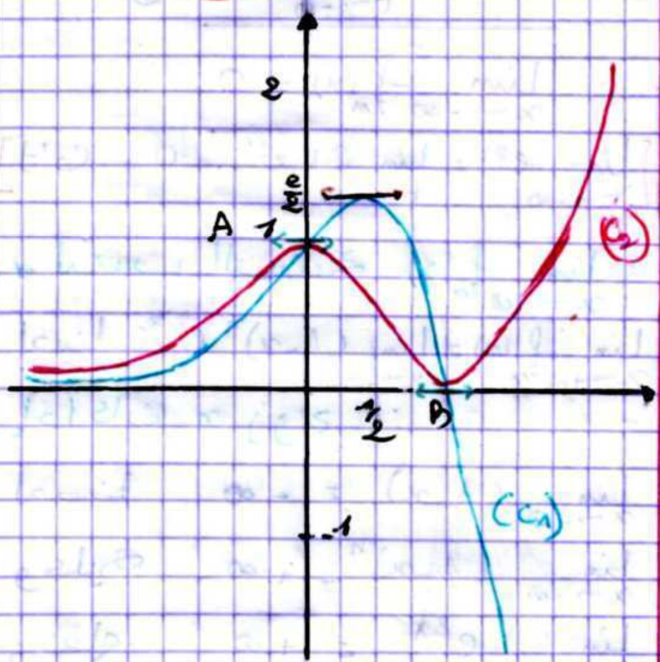
$$f_2(x) - f_1(x) = (1-x)e^{2x}(1-x-1)$$
$$= x(x-1)e^{2x}$$

$$f_2(x) - f_1(x) = x(x-1)e^{2x}$$

x	$-\infty$ $\quad$ 0 $\quad$ 1 $\quad$ $+\infty$
$f_2(x)-f_1(x)$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$
الوضع النسبي لـ (C_1) و (C_2)	C_2 فوق C_1 $\quad$ (A) $\quad$ C_2 تحت C_1 $\quad$ (B) $\quad$ C_2 فوق C_1

بحيث : $A(0,1)$ $\quad$ $B(1,0)$

إنشاء المنحنيين C_1 و C_2.



II - 1 - أ - لنبين أن F قابلة للإشتقاق على $]-\infty, 0[$ لدينا:

$t \mapsto f_1(t)$ متصلة على $]-\infty, 0[$

$t \mapsto \frac{1}{1+e^{2t}}$ متصلة على $]-\infty, 0[$

إذن $t \mapsto \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ متصلة على $]-\infty, 0[$

إذن $\frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ تقبل دالة أصلية G

حيث $F(x) = G(0) - G(x)$

ولدينا $f_1(t)$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

و $\frac{1}{1+e^{2t}}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

إذن $\frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

وعليه فإن $G(x)$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

إذن $F(x)$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0]$

* لنبين أن $F'(x) = \frac{(1-x)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

لدينا $F'(x) = -G'(x)$

إذن $= -\frac{f_1(x)}{1+e^{2x}}$

وعليه $= -\frac{(1-x)e^{2x}}{1+e^{2x}}$

$$\boxed{F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}}}$$

ب- لندرس منحى تغيرات الدالة F

لدينا $x \in]-\infty,0[$

$x<0 \Rightarrow x-1<-1<0$

$x<0 \Rightarrow e^{2x}>1>0$

$\Rightarrow e^{2x}+1>0$

إذن $F'(x) = \frac{(x-1)e^{2x}}{1+e^{2x}} < 0$

$\Leftarrow$ F تناقصية قطعا على $]-\infty,0]$

ج- أ- لنبين $\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)dt$

لدينا

$x<t<0 \Rightarrow 2x<2t<0$

$x<t<0 \Rightarrow e^{2x} \leq e^{2t} \leq e^0 = 1$

$\Rightarrow 1+e^{2x} \leq 1+e^{2t} \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{2t}} \leq \frac{1}{1+e^{2x}}$

ولدينا

$x<t<0 \Rightarrow f(t)>0$ حسب جدول التغيرات.

إذن

$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+e^{2t}} \leq \frac{1}{1+e^{2x}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}f_1(t) \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}} \leq \frac{f_1(t)}{1+e^{2x}}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq \int_x^0 \frac{f_1(t)}{1+e^{2t}}dt \leq \int_x^0 \boxed{\frac{f_1(t)dt}{1+e^{2x}}}$

$$\boxed{\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt \leq F(x) \leq \frac{1}{1+e^{2x}}\int_x^0 f_1(t)dt}$$

ب-

لدينا $\int_x^0 f_1(t)dt = \int_x^0 (1-t)e^{2t}dt$

$= \left[(1-t)\times\frac{1}{2}e^{2t}\right]_x^0 - \int_x^0 -\frac{1}{2}e^{2t}$

$= \left[\frac{(1-t)}{2}e^{2t}\right]_x^0 + \int_x^0 \frac{1}{2}e^{2t}dt$

$= \left[\frac{(1-t)}{2}e^{2t}\right]_x^0 - \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_x^0$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

$= \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

$$\boxed{\int_x^0 f_1(t)dt = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{3}{4}e^{2x}}$$

ج- نضع $\lim_{x\to-\infty} F(x)=l$

لدينا $\lim_{x\to-\infty}\int_x^0 f_1(t)\,dt$

$=\lim_{x\to-\infty} \frac{3}{4}-\frac{2}{4}xe^{2x}-\frac{3}{4}e^{2x}$

$=\frac{3}{4}$

[لأن $\lim_{x\to-\infty} 2xe^{2x}=0$ و $\lim_{x\to-\infty} e^{2x}=0$]

ونعلم أن

$\frac{1}{2}\int_x^0 f_1(t)dt\le F(x)\le\frac{1}{1-e^{x}}\int_x^0 f_1(t)dt$

حسب خاصيات النهايات والترتيب

نجد

$$\boxed{\frac{3}{8}\le l\le\frac{3}{4}}$$

III- 1-أ- لنبين أن $u_n>0$ $\forall n\in\mathbb{N}^*$

لدينا $u_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$

$0\le x\le 1\Rightarrow -1\le -x\le 0$

$\Rightarrow 1-x\ge 0$ و $e^{2x}>0$

$\Rightarrow (1-x)^n e^{2x}\ge 0$

$\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^n e^{2x}dx>0$

$\Rightarrow \int_0^1 f_n(x)\,dx>0$

$\Rightarrow \boxed{u_n>0 \quad \forall n\in\mathbb{N}}$

ب- لندرس إشارة $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ على $[0,1]$

$f_{n+1}(x)-f_n(x)=(1-x)^{n+1}e^{2x}-(1-x)^n e^{2x}$

$=(1-x)^n e^{2x}(1-x-1)$

$=-x(1-x)^n e^{2x}$

لدينا $0\le x\le 1$

يعني أن $-x\le 0$ و $e^{2x}\ge 0$ و $(1-x)^n\ge 0$

إذن $\boxed{\forall x\in[0,1]\quad f_{n+1}(x)-f_n(x)\le 0}$

ج- لنستنتج أن $(u_n)_n$ تناقصية

لدينا $f_{n+1}(x)-f_n(x)\le 0$

$f_{n+1}(x)\le f_n(x)$

$\int_0^1 f_{n+1}(x)\le\int_0^1 f_n(x)$

$$\boxed{u_{n+1}\le u_n}$$

إذن (u_n) متتالية تناقصية.

2-أ- لنبين أن $u_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}u_n$

نضع $u: x\mapsto (1-x)^{n+1}$

$v: x\mapsto \frac{1}{2}e^{2x}$

u و v متصلتين على $[0,1]$

u و v قابلتين للإشتقاق على $[0,1]$

u' و v' متصلتين على $[0,1]$

لدينا $u_{n+1}=\int_0^1 (1-x)^{n+1}e^{2x}dx$

$=[u(x)v(x)]_0^1-\int_0^1 v(x)u'(x)$

$=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{2x}$

$$\boxed{u_{n+1}=-\frac{1}{2}+\frac{n+1}{2}u_n}$$

ب- مساحة الحيز المحصور بين (C_1) و (C_2) والمستقيمين $x=1$ و $x=0$

$S=\int_0^1 |f_2(x)-f_1(x)|\,dx\ u.a$

$=\int_0^1 f_1(x)-f_2(x)\,dx\ u.a$

$=\int_0^1 f_1(x)dx-\int_0^1 f_2(x)\,dx\ u.a$

$=(u_1-u_2)\ u.a$

إذن $S = u_1 - u_2$

وحسب السؤال (2.1) نعلم أن

$u_2 = -\frac{1}{2} + u_1 \Rightarrow -u_2 + u_1 = \frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2} u.a = \frac{1}{2} \times (4 cm^2)$

وعليه $\boxed{S = 2 cm^2}$

3- لنبين أن $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$

لدينا حسب الأسئلة 1-1 ، 1-2 و 2-1

$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow 0 \leq -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} u_n \leq u_n$

$\frac{1}{2} \leq \frac{n+1}{2} u_n$ و $-\frac{1}{2} \leq (1 - \frac{n+1}{2}) u_n$

إذن $\frac{1}{n+1} \leq u_n$ و $u_n \leq \frac{1}{n-1}$

$$\boxed{\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}}$$

ب- تحديد $\lim_{n \to +\infty} u_n$ و $\lim_{n \to +\infty} n u_n$

بما أن $\frac{1}{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{n-1}$

ولدينا $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n-1} = 0$

إذن $\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$

ولدينا $\frac{n}{n+1} \leq n u_n \leq \frac{n}{n-1}$

بما أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n-1}$

$= 1$

فإن $\boxed{\lim_{n \to +\infty} n u_n = 1}$

4- من أجل $n = 1$ $d_1 = \frac{1!}{2^0} d_1$

علاقة صحيحة

نفترض أن $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$

لنبين أن $d_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^n} d_1$

لدينا $d_{n+1} = |v_{n+1} - u_{n+1}|$

$= \left| -\frac{1}{2} + \frac{n+1}{2} v_n + \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} u_n \right|$

$= \left| \frac{n+1}{2} v_n - \frac{n+1}{2} u_n \right|$

$= \frac{n+1}{2} |v_n - u_n|$

إذن $= \frac{n+1}{2} d_n$

ولدينا $d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1$

$\frac{n+1}{2} d_n = \frac{(n+1) n!}{2 \times 2^{n-1}} d_1$

$d_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^n} d_1$

وبالتالي فإن $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d_n = \frac{n!}{2^{n-1}} d_1}$

لنبين أن $\lim_{n \to +\infty} d_n = +\infty$

نعلم أن $d_{n+1} = \frac{n+1}{2} d_n$

ولدينا $\frac{n+1}{2} \geq 2$

إذن $\forall n \geq 3 \quad d_{n+1} \geq 2 d_n$

أي $\frac{d_{n+1}}{d_n} \geq 2$

ومنه فإن $\forall n \geq 3$

$\frac{d_n}{d_{n-1}} \times \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} \times \dots \frac{d_4}{d_3} \geq 2^{n-3}$

إذن $\frac{d_n}{d_3} \geq 2^{n-3}$

أي $\forall n \geq 3 \quad d_n \geq d_3 \times 2^{n-3}$

بما أن $2 > 1$

$\lim_{n \to +\infty} 2^{n-3} d_3 = +\infty$

وحسب مصاديق التقارب

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} d_n = +\infty}$

ب- نفترض أن $(V_n)_{n \geq 1}$ متتالية متقاربة نعلم أن $(U_n)_{n \geq 1}$ متقاربة ولدينا $d_n = |V_n - U_n|$

إذن d_n متقاربة وهذا تناقض

إذن $(V_n)_{n \geq 1}$ متتالية متباعدة.

III - 1 - أ- من أجل $n = 1$

$\frac{2^0}{1!} \leq 1$

علاقة صحيحة

نفترض أن $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

لنبين أن $\frac{2^n}{(n+1)!} \leq 1$

$n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2$

$\Rightarrow \frac{2}{n+1} \leq 1$

ولدينا $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

إذن $\frac{2 \times 2^{n-1}}{n!(n+1)} \leq 1$

وعليه $\frac{2^n}{(n+1)!}$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$

1- ب- لنبين أن $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

لدينا $W_n = \frac{2^n}{n!} U_n$

و $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1 \Rightarrow W_n \leq 2 U_n$

مع $U_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx$

ولدينا $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow e^{2x} \leq e^2$

ونعلم أن $(1-x)^n \geq 0$

إذن $(1-x)^n e^{2x} \leq (1-x)^n e^2$

$U_n \leq e^2 \int_0^1 (1-x)^n dx$

$U_n \leq e^2 \left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1$

إذن $U_n \leq \frac{e^2}{n+1}$

$\Rightarrow \boxed{W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}}$

لنستنتج أن $\lim_{n \to +\infty} W_n = 0$

لدينا $0 \leq W_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{2e^2}{n+1} = 0$

إذن حسب خاصيات النهايات والترتيب

$\boxed{\lim_{n \to +\infty} W_n = 0}$

2- أ- لنبين أن

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad W_{n+1} = \frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$

لدينا

$W_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} U_{n+1}$

$$W_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\left(-\frac{1}{2} - \frac{n+1}{2} u_n\right)$$

$$W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{2^{n+1}(n+1)}{(n+1)\, n! \times 2} u_n$$

$$W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + \frac{2^n}{n!} u_n$$

$$= -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$$

إذن $\boxed{W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n}$

ب- لنحسب مشتقة $\left(\frac{3}{2} - x\right) e^{2x}$

$$\left(\left(\frac{3}{2} - x\right) e^{2x}\right)' = \left(\frac{3}{2} - x\right)' e^{2x} + \left(\frac{3}{2} - x\right)\left(e^{2x}\right)'$$

$$= -e^{2x} + 2\left(\frac{3}{2} - x\right) e^{2x}$$

$$= -e^{2x} + (3 - 2x) e^{2x}$$

$$= 2e^{2x}(1 - x) = 2 f_1(x)$$

إذن $\left(\frac{3}{2} - x\right) e^{2x}$ هي دالة أصلية لـ $2 f_1(x)$

نضع $V(x) = \left(\frac{3}{2} - x\right) e^{2x}$

لدينا $W_1 = \frac{2}{1} u_1$

$$= 2\int_0^1 f_1(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 2 f_1(x)\, dx = [V(x)]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(e^2 - 3)$$

$$\boxed{W_1 = \frac{1}{2}(e^2 - 3)}$$

ج- لنبين أن $W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!}\right)$

من أجل $n = 1$ لدينا

$$W_1 = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=1} \frac{2^k}{k!}\right)$$

$= \frac{1}{2}(e^2 - 3)$ علاقة صحيحة

نفترض أن

$$W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!}\right)$$

لنبين $W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n+1} \frac{2^k}{k!}\right)$

لدينا $W_{n+1} = -\frac{2^n}{(n+1)!} + W_n$

حسب افتراض الترجع

$$W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!}\right)$$

إذن $W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!}\right) - \frac{2^n}{(n+1)!}$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!} - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right)$$

$$W_{n+1} = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n+1} \frac{2^k}{k!}\right)$$

إذن $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$W_n = \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!}\right)$$

د- لنستنتج نهاية $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!}$

لدينا $\lim_{n \to +\infty} W_n = 0$

أي أن $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2}\left(e^2 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!}\right) = 0$

إذن $\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{k=n} \frac{2^k}{k!} = e$

انتهى.